

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

С.Ю. Погорелов, В.Л. Хавин, С.Ю. Шергин, Н.В. Кравцова

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

Учебно-методическое пособие  
по курсу «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»  
для студентов машиностроительных специальностей

Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета,  
протокол № 2 от 23.06.2016 г.

Харьков  
НТУ «ХПИ»  
2016

УДК 620.17

ББК 30.121

Э 45

*Рецензенты:*

*С.О. Вамболь*, д-р. техн. наук, проф., зав. каф. прикладной механики

Национального университета гражданской защиты Украины

*Ю.О. Плеснецов*, канд. техн. наук, зав. каф. обработка металлов давлением

НТУ «ХПИ»

Посібник містить елементи аналізу напружено-деформованого стану і оцінку міцності в розрахункових схемах при складному деформуванні, що дозволяє розраховувати різні практичні завдання.

Призначено для студентів машинобудівних спеціальностей.

**Э 45** Элементы анализа напряженно-деформированного состояния в точке : учеб.-метод. пособ. / С.Ю. Погорелов, В.Л. Хавин, С.Ю. Шергин, Н.В. Кравцова. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2016. – 44 с. – На рус. яз.

ISBN

Пособие содержит элементы анализа напряженно-деформированного состояния и оценку прочности в расчетных схемах при сложном деформировании, что позволяет рассчитывать различные практические задачи.

Предназначено для студентов машиностроительных специальностей.

Ил. 20. Табл. 3. Библиогр. 5 наим.

УДК 620.17

ББК 30.121

ISBN

© С.Ю. Погорелов, В.Л. Хавин,

С.Ю. Шергин, Н.В. Кравцова, 2016

## **Вступление**

В процессе эксплуатации машины и конструкции подвергаются воздействию всевозможных видов внешнего нагружения. При этом во всех точках деформируемых объектов возникают разнообразные сочетания механических напряжений (различные виды напряженно-деформированного состояния). Поэтому инженер-конструктор должен уметь проводить анализ напряженного состояния в любых точках конструкции с целью оценки прочности при напряженном состоянии любой сложности.

Данное пособие охватывает один из самых важных разделов курса сопротивления материалов и посвящено элементам анализа напряженно-деформированного состояния в точке конструкции и оценке ее прочности при сложном напряженном состоянии.

Пособие состоит из трех разделов. В первом разделе дается понятие о напряженном состоянии в точке в тензорном и графическом виде, определяются главные площадки и главные напряжения, проводится классификация типов напряженного состояния. Здесь формулируется обобщенный закон Гука, связывающий компоненты напряженного и деформированного состояния при сложном нагружении. Далее рассматриваются гипотезы предельных напряженных состояний (гипотезы прочности) и вводится понятие эквивалентного напряжения, позволяющее заменить анализ сложного напряженного состояния простым линейным.

Во втором разделе пособия рассматриваются основы теории безмоментных оболочек при сложном нагружении, приводятся формулы для определения напряжений в оболочках различной геометрии.

В третьем разделе пособия приводится порядок и примеры выполнения двух задач расчетно-проектировочного задания.

## 1. Напряжённое состояние в точке

### 1.1. Понятие о напряжённом состоянии в точке и тензоре напряжений

*Напряжённое состояние в точке тела* – это совокупность нормальных и касательных напряжений на множестве плоскостей, проходящих через данную точку тела.

Для полного анализа напряжённого состояния в точке достаточно знать нормальные и касательные напряжения на трёх произвольных взаимно перпендикулярных площадках.

Вырежем тремя парами взаимно перпендикулярных плоскостей в окрестностях рассматриваемой точки тела бесконечно малый параллелепипед (рис. 1.1) и покажем напряжения, действующие на его гранях.

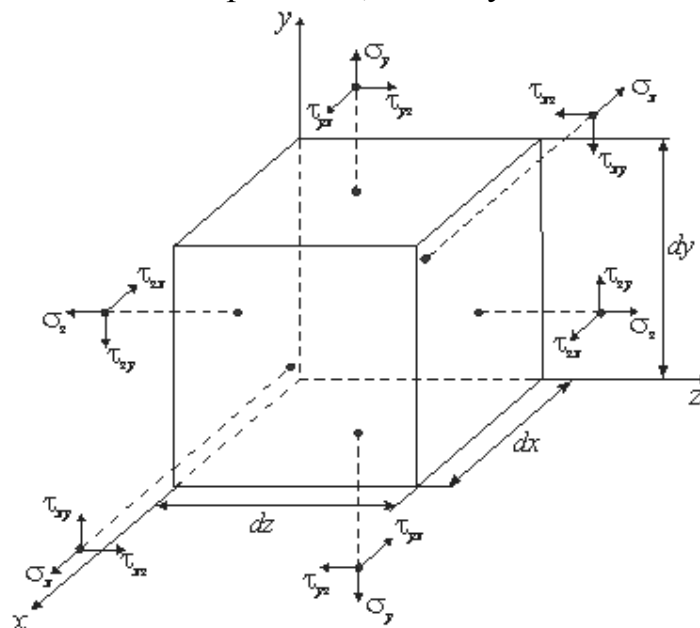


Рисунок 1.1

Нормальные напряжения  $\sigma$  имеют индекс оси, совпадающий с нормалью к площадке, касательные  $\tau$  – два индекса: первый – это индекс нормали к площадке, второй – индекс показывает, параллельно какой координатной оси действует касательное напряжение.

Нормальные напряжения  $\sigma$  считаются положительными, если они направлены в сторону внешней нормали к площадке, на которой действуют.

Касательные напряжения  $\tau$  считаются положительными, если они дают на соответствующую ось проекции такого же знака, как и положительные нормальные, действующие на этой площадке.

Общее количество компонент напряжений, описывающих напряжённое состояние в точке на выбранных площадках – шесть, так как касательные напряжения подчиняются закону парности касательных напряжений [1]:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ \tau_{yx} &= \tau_{zy}; \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}.\end{aligned}$$

Для компактного описания напряжённого состояния в точке вводится математическое понятие тензора напряжений, задаваемого матрицей тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Тензор напряжений может быть разложен на шаровой тензор  $\dot{\sigma}_{\sigma}^0$  (гидростатическая составляющая) и девиатор  $D_{\sigma}$ :  $\dot{\sigma}_{\sigma} = \dot{\sigma}_{\sigma}^0 + D_{\sigma}$ .

Шаровой тензор имеет вид

$$\dot{\sigma}_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{1}} \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_{\text{окт}}$  – октаэдрическое напряжение, вычисляемое по зависимости

$$\sigma_{\hat{1}\hat{1}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Тогда девиатор напряжений определим как

$$D_{\sigma} = T_{\sigma} - \dot{\sigma}_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\hat{1}\hat{1}} \end{pmatrix}.$$

## 1.2. Пример формирования матрицы тензора напряжений

Рассмотрим формирование матрицы тензора напряжений в точках  $B$  и  $C$  бруса квадратного сечения при совместном действии растяжения и кручения (рис. 1.2).

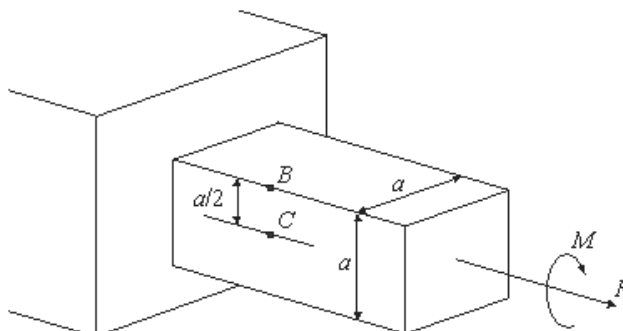


Рисунок 1.2

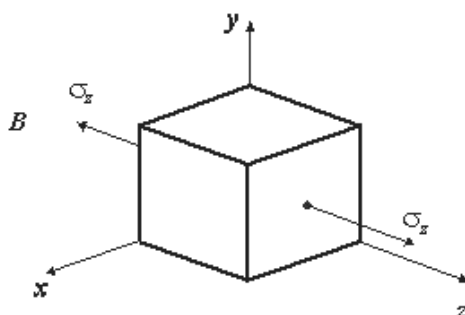


Рисунок 1.3

Компоненты напряженного состояния в точке  $B$  показаны на рис. 1.3. Здесь касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения  $\sigma_z$  вычисляются по зависимости  $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2}$ , а тензор напряжений в точке  $B$  выглядит следующим образом:

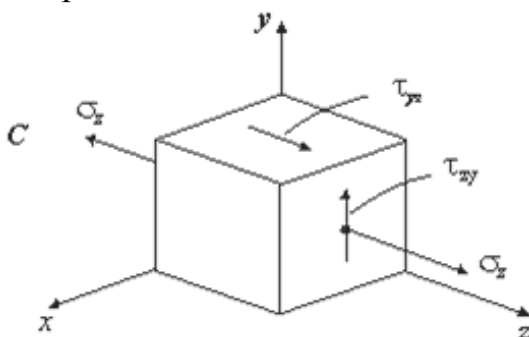


Рисунок 1.4

$$T_{\sigma B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Компоненты напряженного состояния в точке  $C$  показаны на рис. 1.4.

Здесь касательные напряжения определяются по зависимости  $\tau_{zy} = \frac{M\hat{e}}{W\hat{e}} = \frac{M}{0,208 a^3}$ , а нормальные напряжения  $\sigma_z$  вычисляются в виде  $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2}$ , тогда тензор напряжений в точке  $C$  выглядит следующим образом:

$$T_{\sigma C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{0,208 a^3} \\ 0 & \frac{M}{0,208 a^3} & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}.$$

## 2. Определение напряжений на произвольно ориентированной наклонной площадке

Покажем, что по известным компонентам напряжённого состояния, действующим на трёх взаимно перпендикулярных площадках  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , можно однозначно определить компоненты вектора полного напряжения на произвольной наклонной площадке  $P_x, P_y, P_z$  (рис. 2.1).

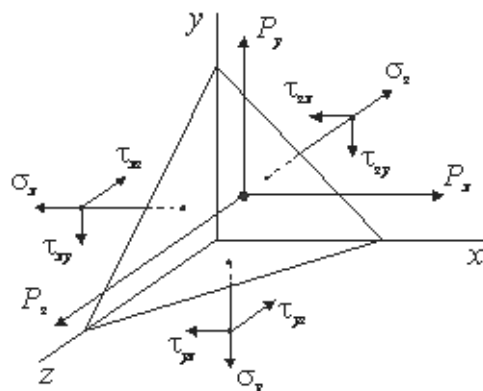


Рисунок 2.1

Ориентация площадки задана направляющими косинусами между осями координат и вектором  $\nu$  нормали к площадке:

$$\begin{aligned}l &= \cos(x, \nu), \\m &= \cos(y, \nu), \\n &= \cos(z, \nu).\end{aligned}$$

При этом выполняется зависимость:  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Связь между площадью наклонной площадки  $A$  и площадями координатных площадок, к которым нормалью являются оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , задаётся соотношениями:

$$\begin{aligned}A_x &= l \cdot A, \\A_y &= m \cdot A, \\A_z &= n \cdot A.\end{aligned}$$

Запишем уравнение равновесия для элементарного тетраэдра (рис. 2.1):

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0.$$

Получаем связь между компонентами напряжённого состояния на координатных площадках и компонентами вектора полного напряжения на наклонной площадке [2]:

$$\begin{cases} P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ P_y = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ P_z = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{cases} \quad (1)$$

### 3. Понятия о главных площадках и главных напряжениях.

#### Классификация типов напряжённого состояния в точке.

#### Октаэдрические напряжения, интенсивность напряжений

Следует отметить, что среди всего множества площадок могут быть площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения [2]. Такие площадки называются *главными площадками*, а действующие на них напряжения – *главными напряжениями*.

Нумерация главных напряжений (рис. 3.1) осуществляется в соответствии с неравенством  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Оси 1, 2, 3 – главные оси.



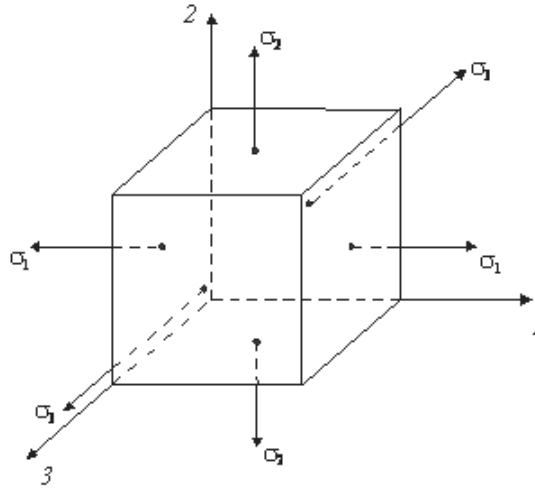


Рисунок 3.1

Различают 3 типа напряжённого состояния в точке:

1) **Одноосное (линейное)** напряжённое состояние. (Одно из главных напряжений отличное от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  или  $\sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ).

2) **Двухосное (плоское)** напряжённое состояние. (Два главных напряжения отличны от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$  или  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ , или  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ ).

3) **Трёхосное (объёмное)** напряжённое состояние. (Все три главных напряжения отличны от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ ).

Линейное напряжённое состояние называют простым напряжённым состоянием, а плоское и объёмное – сложными напряжёнными состояниями.

Предположим, что наклонная площадка (рис. 2.1) является главной площадкой, тогда компоненты вектора полного напряжения на этой площадке

$$P_x = P \cdot l ,$$

$$P_y = P \cdot m ,$$

$$P_z = P \cdot n .$$

представляют собой главные напряжения, а система уравнений (1) позволяет определить направляющие косинусы  $l, m, n$  этой главной площадки из уравнения

$$\begin{cases} (\sigma_x - P)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0; \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - P)m + \tau_{yz}n = 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - P)n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При этом выполняется зависимость  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Чтобы система уравнений (2) имела нетривиальное решение, отличное от нулевого, необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю [3]:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - P & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - P & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - P \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, перейдём к кубическому уравнению

$$P^3 - P^2 I_1 + P I_2 - I_3 = 0,$$

решение которого позволит определить главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Здесь  $I_1, I_2, I_3$  – инварианты тензора напряжений, т.е. величины для данной точки постоянные, не зависящие от ориентации координатных площадок [2]:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yx}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

По известным главным напряжениям можно определить максимальные касательные напряжения:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

Площадка, на которой действует  $\tau_{\max}$ , параллельна главному напряжению  $\sigma_2$  и равнонаклонена к направлениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (рис. 3.2).

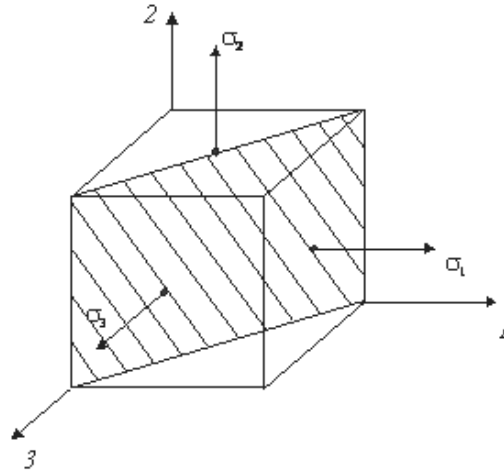


Рисунок 3.2

Нормальное напряжение на октаэдрической площадке, равнонаклонённой ко всем главным осям  $1, 2, 3$  определяется зависимостью:  $\sigma_1^0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ , касательное октаэдрическое напряжение определяется по формуле:

$$\tau_1^0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Если напряжённое состояние сложное (плоское или объемное), т.е. два или три главных напряжения отличны от нуля, возникает вопрос о сравнительной мере интегральной оценки уровня напряжённого состояния в точке. Одной из таких мер является интенсивность напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

## 4. Обобщённый закон Гука

### 4.1. Формулировка закона Гука

Для линейного напряжённого состояния ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), формула закона Гука имеет вид  $\sigma_1 = E \varepsilon_1$ . Деформации  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  определяются известными зависимостями:  $\varepsilon_2 = -\mu \varepsilon_1, \varepsilon_3 = -\mu \varepsilon_1$ , где  $E$  – модуль продольной упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

При сложном (трёхосном) напряжённом состоянии закон Гука связывает компоненты напряженного и деформированного состояния в точке, в которой имеет место линейно-упругое деформирование. Пусть известны главные площадки (главные направления) и главные напряжения. Направления главных относительных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  совпадают с главными направлениями для напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

По принципу суперпозиции

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \\ &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].\end{aligned}$$

Аналогичные соотношения имеем для  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ . В этом случае обобщённый закон Гука для изотропного тела для главных направлений имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases}$$

Для произвольно ориентированных координатных площадок имеем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{cases}$$

К зависимостям закона Гука, связывающим  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , следует добавить зависимости, связывающие  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  и  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  [2]:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{cases}$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  – угловые деформации. При этом существует зависимость между модулем упругости  $E$  и модулем сдвига  $G$  [2]:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

#### 4.2. Пример определения компонент напряженного и деформированного состояния с применением обобщенного закона Гука

В массивной недеформируемой плите вырезан сквозной паз шириной и глубиной по 1 см (рис. 4.1). В этот паз без зазора вставлен куб из дюралюминия размером  $1 \times 1 \times 1$  см, который нагружается силой 8 кН. Для дюралюминия коэффициент Пуассона  $\mu = 0,33$ , модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа.

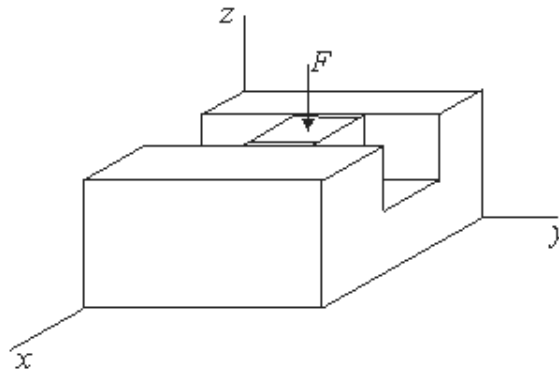


Рисунок 4.1

Так как процессу деформирования куба вдоль оси  $y$  ничто не мешает, а в направлении оси  $x$  деформирование практически невозможно, то  $\epsilon_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ . Нормальное напряжение на площадке  $z$  вычисляем по формуле

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{8 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = -8 \cdot 10^7 \text{ Па} = -80 \text{ МПа}.$$

Закон Гука для объёмного напряженного состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{cases}$$

отсюда находим напряжение  $\sigma_x$  и деформации  $\epsilon_y, \epsilon_z$ :

$$\sigma_x = \mu(\sigma_z + \sigma_y) = 0,33(-8 \cdot 10^7) = -2,64 \cdot 10^7 \text{ Па} = -26,4 \text{ МПа}.$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[-\mu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{7 \cdot 10^4}[-0,33(-80 - 26,4)] = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x)] = \frac{1}{7 \cdot 10^4}[-80 - 0,33(-26,4)] = -10 \cdot 10^{-4}.$$

Расставим индексы для главных напряжений и главных деформаций:

$$\sigma_1 = \sigma_y = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_y = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -26,4 \text{ МПа}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0,$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -80 \text{ МПа}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z = -10^{-4}.$$

## 5. Удельная потенциальная энергия деформации

**Потенциальная энергия деформации** – это энергия, которая накапливается в теле при его упругом деформировании. Например, в результате растяжения консольного стержня силой  $F$  (рис. 5.1, а) процесс деформирования осуществляется в упругой области (заштрихованная часть диаграммы растяжения), (рис. 5.1, б).

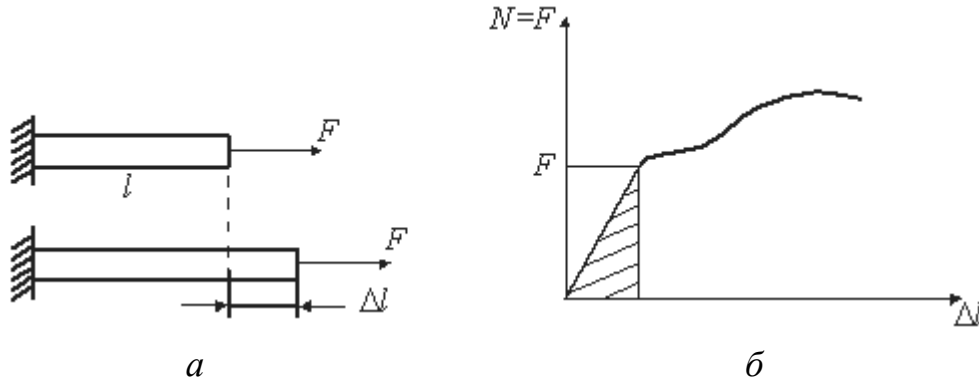


Рисунок 5.1

Потенциальная энергия деформации численно равна работе внутренних усилий, затраченной в процессе упругой деформации тела (заштрихованная область диаграммы):

$U_{\Pi} = \frac{1}{2} N \cdot \Delta l = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$ . Подставляя сюда за-

висимость для  $\Delta l$  ( $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Fl}{EA}$ ; [1]), окончательно получаем:

$$U_{\Pi} = \frac{1}{2} F \cdot \frac{Fl}{EA} = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA}.$$

Удельная потенциальная энергия, т.е. энергия, приходящаяся на единицу объёма, вычисляется так:  $u = \frac{U_1}{V} = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA} \cdot \frac{1}{lA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{F}{AE} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ .

В случае объёмного напряжённого состояния удельная потенциальная энергия на основе принципа суперпозиции может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1 (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \sigma_2 (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)) + \sigma_3 (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) \right] = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]. \end{aligned}$$

При деформировании бесконечно малого элемента (рис.3.1) изменяется не только его объем, но и форма. Поэтому удельную потенциальную энергию деформации можно представить в виде суммы двух составляющих:  $u = u_v + u_\phi$ . Здесь  $u_v$  – удельная потенциальная энергия изменения

объёма:  $u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$ ,  $u_\phi$  – удельная потенциальная энергия

формоизменения [1]:  $u_\phi = \frac{1+\mu}{3A} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)$ .

## 6. Гипотезы предельных напряжённых состояний (гипотезы прочности)

Различают три возможных варианта состояния материала в точке в процессе деформирования: упругое, пластическое и разрушение.

Наступление пластического состояния при одноосном напряжённом состоянии (растяжение–сжатие) характеризуется достижением действующих напряжений предела текучести  $\sigma_\delta$ , момент разрушения определяется достижением напряжениями предела прочности  $\sigma_1 \div$  (временного сопротивления  $\sigma_{\hat{a}}$ ). Достижение действующим напряжением величины  $\sigma_T$  или  $\sigma_{\hat{a}}$  при одноосном состоянии определяется как исчерпание соответствующего ресурса по росту напряжений, поэтому напряжённые состояния, соответствующие условиям  $\sigma = \sigma_T$  или  $\sigma = \sigma_B$ , являются недопустимыми и объединяются общим названием **предельные состояния**.

Важнейшей задачей инженерного расчёта является оценка работоспособности детали по известному напряжённому состоянию.

При одноосном напряжённом состоянии экспериментально устанавливаются значения предельных напряжений, соответствующих началу разрушения ( $\sigma_{\hat{a}}$ ) или возникновению недопустимых остаточных пластических деформаций ( $\sigma_T$ ), и безопасными являются напряжённые состояния, подчиняющиеся условиям:  $\sigma < \sigma_T$  (по критерию накопления остаточных деформаций) или  $\sigma < \sigma_{\hat{a}}$  (по критерию разрушения).

Для сложного напряжённого состояния экспериментальный путь оценки достижения предельного состояния в точке (текучести или разрушения) практически сложно реализовать из-за технических трудностей, возникающих при проведении таких испытаний и значительного их объёма.

Другой путь оценки достижения предельного состояния – введение гипотез о преимущественном влиянии на прочность (текучесть) материала того или иного фактора, при этом полагают, что предельное состояние материала при любом напряжённом состоянии наступит только тогда, когда величина данного фактора достигнет некоторого предельного значения.

Так как напряжённое состояние может иметь бесконечное количество комбинаций  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , то вводится понятие эквивалентного напряжения (эквивалентных напряжений). При этом применение гипотезы для оценки наступления предельного состояния позволяет математически формализовать переход от сложного напряжённого состояния к *эквивалентному одноосному напряжённому состоянию* (одноосному растяжению).

*Эквивалентное напряжение*  $\sigma_{\hat{a}}$  – это такое растягивающее напряжение, которое следует создать в материале, чтобы это напряжённое состояние было равноопасным исходному сложному напряжённому состоянию.

*Коэффициент запаса* при сложном напряжённом состоянии – это число, показывающее, во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты напряжённого состояния, чтобы оно стало предельным.

В настоящее время известно несколько, хронологически появившихся одна за другой, гипотез предельных напряжённых состояний, называемых гипотезами прочности.



### **6.1. Первая гипотеза прочности (гипотеза наибольших нормальных напряжений)**

Согласно этой гипотезе, выдвинутой Галилеем (XVII в.), преимущественное влияние на прочность конструкции оказывает величина наибольшего нормального напряжения  $\sigma_1$  (или  $\sigma_3$ ), а два других главных напряжения не учитываются.

Опытная проверка показывает, что эта гипотеза прочности непригодна для большинства материалов и напряженных состояний и даёт удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (камень, кирпич).

### **6.2. Вторая гипотеза прочности (гипотеза наибольших линейных деформаций)**

Согласно этой гипотезе, предложенной Мариоттом в 1682 г., в качестве критерия наступления предельного состояния принимается наибольшая по абсолютной величине линейная деформация.

Опытная проверка этой гипотезы также показала, что она не применима для большинства материалов и даёт удовлетворительные результаты лишь для хрупких материалов.

### **6.3. Третья гипотеза прочности (гипотеза наибольших касательных напряжений)**

Согласно третьей гипотезе прочности, предложенной Кулоном (1773 г.), в качестве критерия предельного состояния (наступления текучести) принимается величина наибольшего касательного напряжения. Считается, что наступление текучести в общем случае напряженного состояния имеет место тогда, когда наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max}$  достигает своего предельного значения  $\tau_T$ . Последнее определяется в момент достижения текучести при простом растяжении.

Условие прочности в этом случае имеет вид:  $\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$ .

Так как  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $\tau_T = \frac{1}{2}\sigma_T$ , то условие прочности можно выра-

зять через главные напряжения:  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ,  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ . Эквивалентное напряжение по третьей гипотезе:  $\sigma_{\text{экв}}^{222} = \sigma_1 - \sigma_3$ , а условие прочности:  $\sigma_{\text{экв}}^{222} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ .

Третья гипотеза прочности, в общем, хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

Недостаток третьей гипотезы заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения  $\sigma_2$ , которое может быть значительным и оказывать некоторое влияние на состояние материала.

#### **6.4. Четвёртая гипотеза прочности (энергетическая гипотеза формоизменения)**

Авторы этой гипотезы – Хубер, Мизес, Генки – в качестве критерия наступления предельного состояния (потери прочности) предложили использовать величину удельной потенциальной энергии формоизменения.

Предполагается, что предельное состояние (текучесть) наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего предельного значения. Последнее можно определить при простом растяжении в момент наступления текучести.

Условие наступления текучести:  $u_{\text{ф}} = \left( u_{\text{ф}} \right)_T$ . Удельная потенциальная энергия формоизменения при сложном напряжённом состоянии:

$$u_{\text{ф}} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1).$$

При одноосном напряжённом состоянии (растяжении) в момент наступления текучести ( $\sigma_1 = \sigma_T, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) имеем:  $\left( u_{\text{ф}} \right)_T = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2$ . Следовательно, условие возникновения текучести можно записать в виде

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_T.$$

Тогда эквивалентное напряжение запишем в виде

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{В}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Условие прочности по четвёртой гипотезе прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{В}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{T}}} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}}^{\text{В}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Опыты хорошо подтверждают четвёртую гипотезу для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

### 6.5. Гипотеза прочности Мора

Данная гипотеза была предложена О.Мором в начале XX в. и основывается на предположении, что прочность материалов в общем случае напряжённого состояния зависит, главным образом, от величины и знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений, а среднее по величине главное напряжение  $\sigma_2$  лишь незначительно влияет на прочность. Эквивалентное напряжение по гипотезе Мора вычисляется так:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+],$$

где  $[\sigma_+]$  и  $[\sigma_-]$  – допустимые напряжения при растяжении и сжатии соответственно. При одинаковом сопротивлении материала растяжению и сжатию ( $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ ) расчётная формула совпадает с формулой, полученной по третьей гипотезе прочности. Гипотеза пригодна как для хрупких, так и для пластичных материалов.

Для практических расчётов следует использовать:

- а) четвёртую гипотезу (или третью) – для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию;
- б) гипотезу Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию (как правило, хрупких).

Первая и вторая гипотезы прочности дают значительные погрешности и в настоящее время не применяются.

## 7. Основы расчёта оболочек по безмоментной теории

Для определения напряжений в тонкостенных сосудах преимущественно используется так называемая безмоментная («мембранная») теория оболочек [4]. По этой теории стенки сосуда рассматриваются как весьма тонкие оболочки («мембраны»), не воспринимающие изгибающих усилий.

Сосуды, рассчитываемые по мембранной теории, должны удовлетворять обязательным условиям:

- 1) сосуды должны быть тонкостенными (толщина стенок не превышает одной двадцатой части диаметра сосуда);
- 2) форма сосуда обязательно должна представлять собой тело вращения;
- 3) нагрузка должна быть распределённой (например, газовое или гидростатическое давление), симметричной относительно оси вращения, плавно изменяться и не иметь резких скачков.

Совокупность этих трёх условий позволяет принять гипотезу равномерного распределения напряжений по толщине стенки, т.е. стенка работает только на растяжение или сжатие.

На рис. 7.1 изображена симметричная оболочка толщиной  $h$ , из которой двумя парами меридиональных и нормальных к ним сечений выделен бесконечно малый элемент поверхности  $abcd$ . Здесь  $\rho_m$  – радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности оболочки ( $\rho_m = bO_1$ ),  $\rho_\theta$  – радиус кривизны сечения, перпендикулярного дуге меридиана ( $\rho_\theta = bO$ ),  $ab = ds_2$ ,  $ac = ds_1$ . Оболочка находится под действием внутреннего давления  $P$ , которое может меняться по высоте, но будет одинаковым во всех точках плоскости, перпендикулярной к оси оболочки (осесимметричное давление).

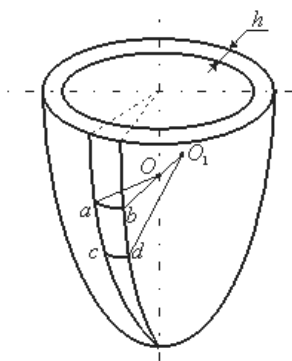


Рисунок 7.1

Рассмотрим напряженное состояние выделенного элемента  $abcd$  (рис.7.2).

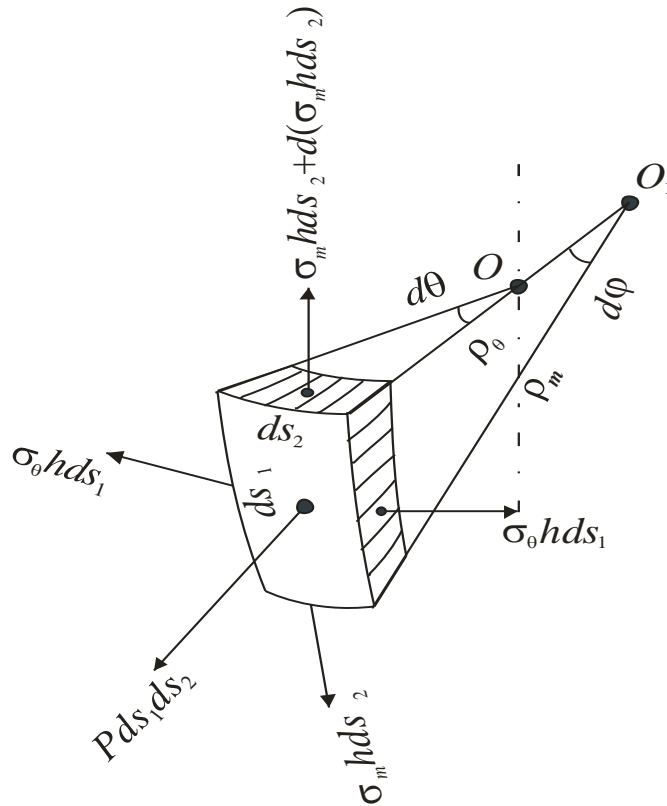


Рисунок 7.2

На его гранях возникают меридиональные ( $\sigma_m$ ) и окружные напряжения ( $\sigma_\theta$ ). Умножая эти напряжения на площади граней элемента, получаем силы, проецируя которые на нормаль к поверхности, записываем уравнение равновесия элемента:

$$P \cdot ds_1 \cdot ds_2 - \sigma_m \cdot h \cdot ds_2 \cdot \sin \frac{d\phi}{2} - [\sigma_m \cdot h \cdot ds_2 + d(\sigma_m \cdot h \cdot ds_2)] \cdot \sin \frac{d\phi}{2} - 2 \cdot \sigma_\theta \cdot h \cdot ds_1 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Так как синус малого угла равен самому углу и, учитывая соотношения  $d\phi = ds_1 / \rho_m$ ,  $d\theta = ds_2 / \rho_\theta$ , окончательно получаем:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{P}{h}.$$

Это соотношение называется **уравнением Лапласа**.

Напряжения  $\sigma_m$  и  $\sigma_\theta$  являются главными напряжениями. Третье главное напряжение, действующее по нормали к поверхности оболочки, равное давлению  $P$ , значительно меньше первых двух и им пренебрегают (т.е. считают его равным нулю).

Рассмотрим определение напряжений в различных оболочках, находящихся под действием внутреннего давления  $P$ .

#### Цилиндрическая оболочка

Возможны два варианта: оболочка с днищами или без них.

##### 1) Оболочка без днища

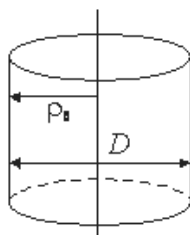


Рисунок 7.3

так как  $\sigma_m = 0$ ,  $\rho_m \rightarrow \infty$  (радиус кривизны меридиана), то  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} \rightarrow 0$ ,  $\rho_\theta = \frac{D}{2}$ ,

( $D$  – средний диаметр оболочки)

Из уравнения Лапласа следует:

$$\frac{2\sigma_\theta}{D} = \frac{P}{h} \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{P \cdot D}{2h}$$

##### 2) Оболочка с днищами

Равнодействующая от внутреннего давления, приходящегося на днище:

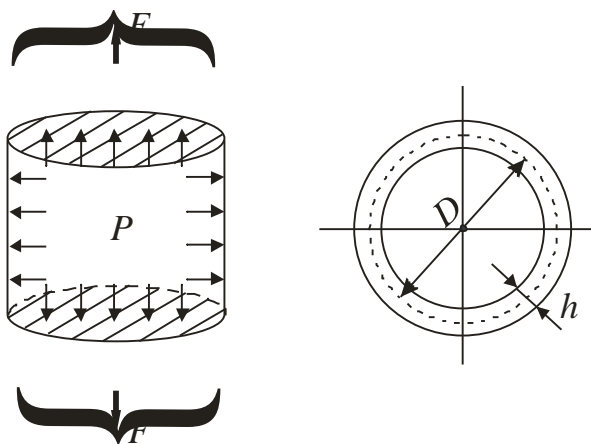


Рисунок 7.4

$F = P \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ . Форма днища несущественна (плоская, коническая, сферическая).

Площадь поперечного сечения оболочки:

$A = h \cdot \pi \cdot D$ , равнодействующая  $F$  может быть определена так:

$$F = \sigma_m \cdot A = \sigma_m \cdot h \pi D.$$

Приравнявая выражения для  $F$ , получаем

$$P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \sigma_m \cdot h \pi D,$$

Отсюда, меридиональные напряжения равны  $\sigma_m = \frac{PD}{4h}$ , а окружные, как

показано в предыдущем примере:  $\sigma_\theta = \frac{\rho D}{2h}$ .

*Сферическая оболочка*

В этом случае  $\rho_m = \rho_\theta = \frac{D}{2}$  и  $\sigma_m = \sigma_\theta$ .

Из уравнения Лапласа следует:  $\sigma_m = \sigma_\theta = \frac{PD}{4h}$ .

Зависимости получены при действии внутреннего давления. Для внешнего давления необходимо поменять знак  $P$ .

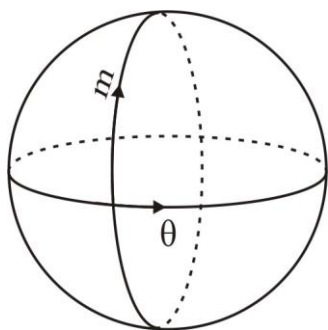


Рисунок 7.5

## 8. Расчетно-проектировочное задание

При изучении разделов «Основы теории напряжённого состояния в точке» и «Основы теории безмоментных оболочек» в курсе «Сопротивление материалов» ставится цель научить студентов проводить анализ напряженно-деформированного состояния в опасных точках конструкций и на этой основе решать задачи оценки прочности и жесткости, подбора материалов и нахождения геометрических параметров элементов конструкций машин и механизмов.

Согласно требованиям курса «Сопротивление материалов» студентам предлагается выполнить расчетно-проектировочное задание (РПЗ) по темам в «Основы теории напряжённого состояния в точке» и «Основы теории безмоментных оболочек». Выполняя это задание, студент учится определять положение опасных точек в конструкции, находить параметры

напряженно-деформированного состояния (НДС) в них, оценивать тип напряженного состояния в точке, находить главные площадки и главные напряжения, выбирать одну из существующих гипотез прочности. Применяя навыки анализа НДС в точке, студентом проводится оценка прочности цилиндрической оболочки.

### **8.1. Содержание расчетно-проектировочного задания**

Расчетно-проектировочное задание состоит из трех этапов:

1. Решение двух задач, оформление их согласно требованиям кафедры «Сопротивление материалов».
2. Написание контрольной работы по теме РПЗ.
3. Защита работы, заключающаяся в беседе студента с преподавателем по теме РПЗ и ответах на контрольные вопросы.

**Цель задания** – проведение анализа НДС в точке, оценка прочности цилиндрической оболочки.

#### **РПЗ состоит из двух задач:**

1. *Анализ НДС в точке.* По заданным компонентам напряжённого состояния в точке необходимо найти величины главных напряжений и главных деформаций, вычислить эквивалентные напряжения и подобрать материал конструкции [5].

Варианты исходных данных приведены в приложении 1.

2. *Оценка прочности цилиндрической оболочки.* Для цилиндрической оболочки с днищами, имеющей диаметр срединной поверхности  $D$  и толщину стенки  $h$ , нагруженной внутренним давлением  $P$ , продольной силой  $F$ , крутящим  $M_K$  и изгибающим  $M_{II}$  моментами найти внутренние усилия в опасном сечении, определить максимальные напряжения, вычислить эквивалентные напряжения и определить коэффициент запаса конструкции.

Варианты расчетных схем и численные данные приведены в приложении 2.

### **8.2. Порядок выполнения задания**

**Задача 1. Провести анализ НДС в точке следуя плану.**

1. Выписать для заданного варианта численные данные.
2. Представить напряжённое состояние в виде тензора напряжений и графически.



3. Разложить тензор напряжений на шаровой тензор напряжений и на девиатор напряжений.

4. Вычислить инварианты тензора напряжений.

5. Составить и решить характеристическое уравнение тензора напряжений, проверить решение по инвариантам.

6. Вычислить эквивалентные напряжения.

7. Подобрать материал по заданному коэффициенту запаса по текучести ( $n_T = 1,5$ ).

**Задача 2. Оценить прочность цилиндрической оболочки.**

1. Выписать для заданного варианта численные данные.

2. Определить геометрические характеристики кольцевого сечения оболочки.

3. Определить компоненты напряженного состояния в опасном сечении.

4. Провести анализ напряжённого состояния в опасной точке.

5. Вычислить главные напряжения.

6. Определить эквивалентное напряжение.

7. Найти коэффициент запаса по текучести.

**8.3. Примеры решения задач**

**8.3.1. Образец выполнения задачи 1**

**Дано:**

$$\sigma_x = -100 \text{ МПа}, \sigma_y = -150 \text{ МПа}, \sigma_z = 30 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tau_{zy} = -107,2 \text{ МПа}, n_T = 1,5.$$

**Необходимо:** провести анализ напряжённо-деформированного состояния в точке, подобрать материал.

**Решение:**

1. Представляем заданное напряжённое состояние (рис. 8.1) в виде тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & -107,2 \\ 0 & -107,2 & 30 \end{pmatrix}.$$

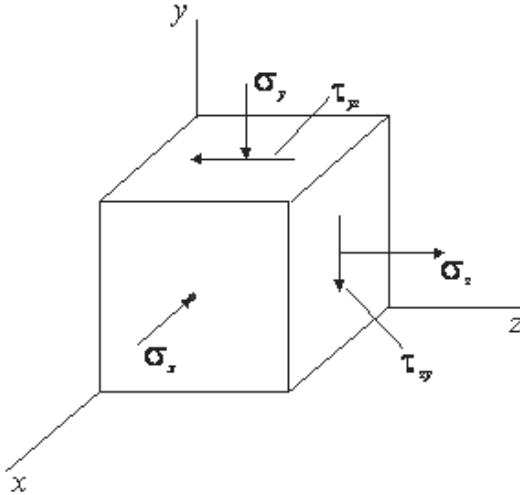


Рисунок 8.1

2. Раскладываем тензор напряжений на шаровой тензор напряжений и на девиатор напряжений.

$$\sigma = \sigma^0 + D_\sigma$$

Для этого разложения вычислим октаэдрическое нормальное напряжение:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{-100 + (-150) + 30}{3} = -73,33 \text{ МПа}.$$

Шаровой тензор напряжений имеет вид:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -73,33 & 0 & 0 \\ 0 & -73,33 & 0 \\ 0 & 0 & -73,33 \end{pmatrix}.$$

Девиатор напряжений:

$$D_\sigma = \sigma - \sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -26,67 & 0 & 0 \\ 0 & -76,67 & -107,2 \\ 0 & -107,2 & 103,33 \end{pmatrix}$$

Графически это изображено на рис. 8.2

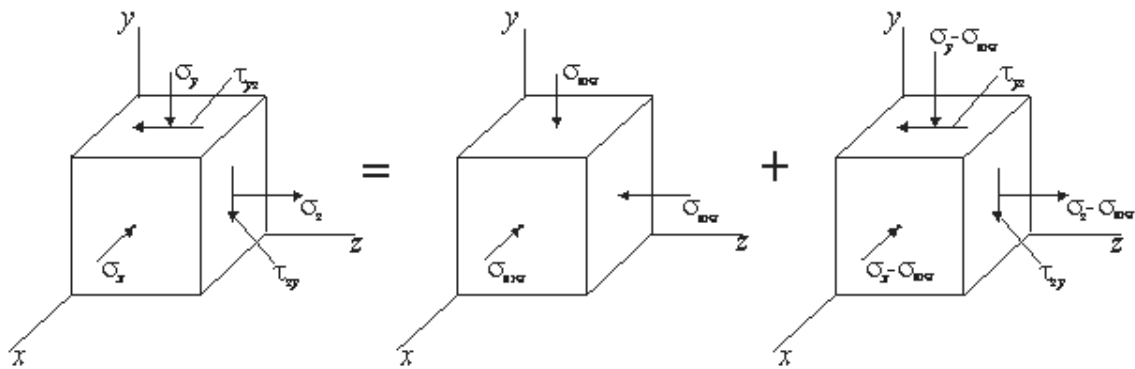


Рисунок 8.2

3. Вычисляем инварианты тензора напряжений.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -100 - 150 + 30 = -220 \text{ МПа}$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zy}^2 = (-100)(-150) + (-150)30 - (-100) - (-107,2)^2 \approx -3992 \approx -3,99 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = (-100)(-150)30 - (-100) \cdot (-107,2)^2 = 1599184 = 15,99 \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^3$$

4. Составляем и решаем характеристическое уравнение тензора напряжений, проверяем решение по инвариантам.

Из анализа исходного напряжённого состояния (рис.8.1) видно, что площадка  $x$  является главной площадкой, и характеристическое уравне-

ние (кубическое) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} P - \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & P - \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & P - \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или } (P - \sigma_x) \cdot [P^2 - (\sigma_z + \sigma_y)P + (\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2)] = 0.$$

Тогда корни уравнения будут:  $P_1 = \sigma_x = -100 \text{ МПа}$ ,

$$P_{2,3} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y + \sigma_z)^2 - 4(\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (-150 + 30) \pm \sqrt{(-150 + 30)^2 - 4(30(-150) - (-107,2)^2)} \right] = \frac{1}{2} [-120 \pm 280],$$

$$P_2 = 80 \text{ МПа}, P_3 = -200 \text{ МПа}.$$

Расставим индексы главных напряжений (в соответствии с условием  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ):

$$\sigma_1 = P_2 = 80 \text{ МПа}, \sigma_2 = P_1 = -100 \text{ МПа}, \sigma_3 = P_3 = -220 \text{ МПа}.$$

Вычислим инварианты тензора напряжений через главные напряжения:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 80 + (-100) + (-200) = -220 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 80(-100) + (-100)(-200) + (-200)80 = -4 \cdot 10^3 (\text{МПа})^2,$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 80(-100)(-200) = 16 \cdot 10^5 (\text{МПа})^3.$$

Сопоставив величины инвариантов, убедимся в их хорошем совпадении:  $-220 = -220$ ;  $-3,99 \cdot 10^3 \cong -4 \cdot 10^3$ ;  $15,99 \cdot 10^5 \cong 16 \cdot 10^5$ .

Таким образом, величины главных напряжений найдены правильно.

#### 5. Вычисляем эквивалентные напряжения.

Так как в рассматриваемой точке имеет место сложное напряженное состояние, проверку прочности и определение коэффициента запаса по текучести следует вести по эквивалентным напряжениям, используя гипотезы предельных состояний:

а) по гипотезе наибольших касательных напряжений получаем:

$$\sigma_{\text{экв}}^{22} = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - (-200) = 280 \text{ МПа};$$

б) по гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}}^{2V} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (80 - (-100))^2 + (-100 - (-200))^2 + (-200 - 80)^2 \right]} = 246 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

6. Подбираем материал по заданному коэффициенту запаса по текучести.

Коэффициент запаса по текучести  $n_T = 1,5$ . Из условия прочности следует, что предел текучести материала:  $\sigma_T \geq \sigma_{\text{экв}} \cdot n_T$ . Применяя гипотезу наибольших касательных напряжений, получаем  $\sigma_T \geq 280 \cdot 1,5 = 420 \text{ МПа}$ . Из справочных данных (приложение 3) подбираем сталь Ст 60 ( $\sigma_T = 420 \text{ МПа}$ ).

По гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения предел текучести будет:  $\sigma_T \geq 246 \cdot 1,5 = 369 \text{ МПа}$ . Подходящий материал – Ст 50 ( $\sigma_T = 380 \text{ МПа}$ ).

### 8.3.2. Образец выполнения задачи 2

**Дано:**

Внешняя сила  $F = 5 \text{ кН}$ .

Изгибающий момент

$M = 50 \text{ Нм}$ .

Крутящий момент

$M_k = 30 \text{ Нм}$ . Давление

$P = 2,5 \text{ МПа}$ .

Диаметр срединной поверхности оболочки  $D = 30 \text{ мм}$ .

Толщина оболочки  $h = 1,2 \text{ мм}$

Предел текучести при растяжении и сжатии:  $\sigma_{ТД} = 250 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{ТН} = 300 \text{ МПа}$ .

**Необходимо:** определить коэффициент запаса по текучести цилиндрической оболочки.

**Решение:**

1. Определяем геометрические характеристики кольцевого сечения оболочки.

Внутренний диаметр кольца (рис. 8.4)

равен:  $D_B = D - h = 30 - 1,2 = 28,8 \text{ мм}$ ,

а наружный диаметр:

$$D_H = D + h = 30 + 1,2 = 31,2 \text{ мм}$$

Находим коэффициент  $c$ :

$$c = \frac{D_B}{D_H} = \frac{28,8}{31,2} = 0,923.$$

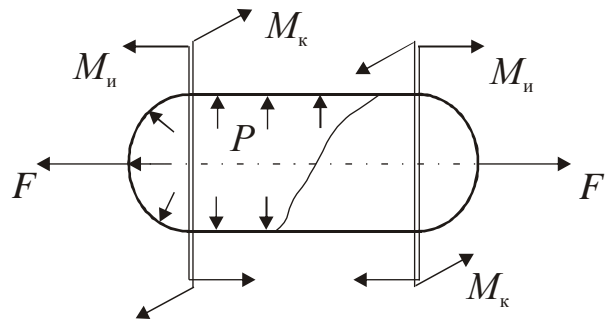


Рисунок 8.3

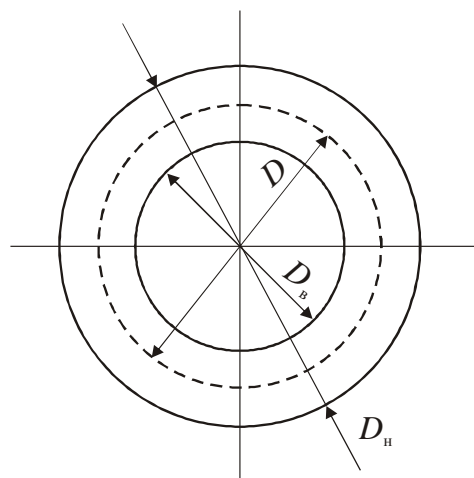


Рисунок 8.4

Площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{\pi D_1^2}{4} (1 - c^2) = \frac{3,14 \cdot 31,2^2}{4} (1 - 0,923^2) = 113 \text{ мм}^2 = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Вычисляем осевой  $W_x$  и полярный  $W_p$  моменты сопротивления кольца

$$W_x = \frac{\pi D_1^3}{32} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 31,2^3}{32} (1 - 0,923^4) = 817 \text{ мм}^3 = 8,17 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3;$$

$$W_p = \frac{\pi D_1^3}{16} (1 - c^4) = 2W_x = 1,634 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

2. Определяем компоненты напряженного состояния в опасном сечении.

На рис. 8.5 показаны внутренние усилия и эпюры распределения напряжений по высоте сечения

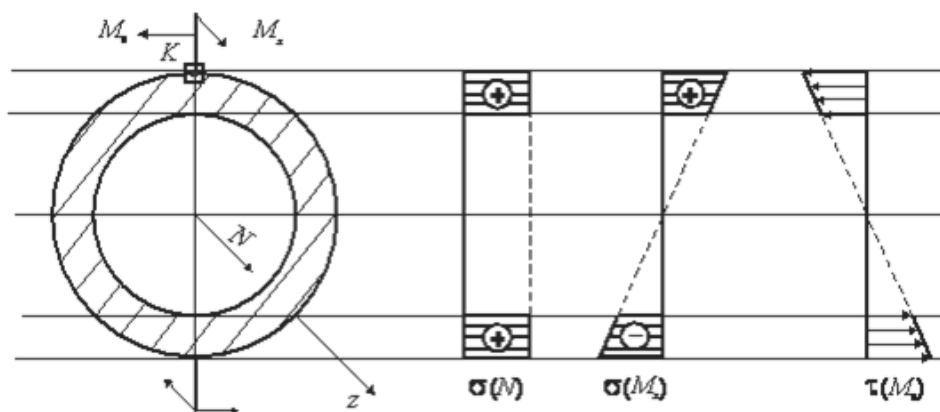


Рисунок 8.5

Вычисляем напряжения, вызванные продольной силой

$$\sigma(N) = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{5 \cdot 10^3}{1,13 \cdot 10^{-4}} = 4,42 \cdot 10^7 \text{ Па} = 44,2 \text{ МПа},$$

максимальные напряжения от изгибающего момента:

$$\sigma_{\max}(M_x) = \frac{M_x}{W_x} = \frac{50}{8,17 \cdot 10^{-7}} = 6,12 \cdot 10^7 \text{ Па} = 61,2 \text{ МПа}.$$

Максимальные напряжения при кручении:

$$\tau_{\max}(\hat{e}) = \frac{\hat{e}}{W_{\hat{e}}} = \frac{30}{1,634 \cdot 10^{-6}} = 18,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 18,4 \text{ МПа}.$$

Внутреннее давление в оболочке вызывает меридиональное  $\sigma_m$  и окружное  $\sigma_\theta$  напряжения:

$$\sigma_m = \frac{p \cdot D}{4h} = \frac{2,5 \cdot 30}{4 \cdot 1,2} = 15,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_\theta = \frac{p \cdot D}{2h} = \frac{2,5 \cdot 30}{2 \cdot 1,2} = 31,3 \text{ МПа}.$$

3. Проводим анализ напряжённого состояния в опасной точке.

Анализируя эпюры напряжений (рис.8.5) определяем положение опасной точки в сечении – это точка  $K$ . На рис. 8.6 изображена опасная точка и действующие на ее гранях напряжения.

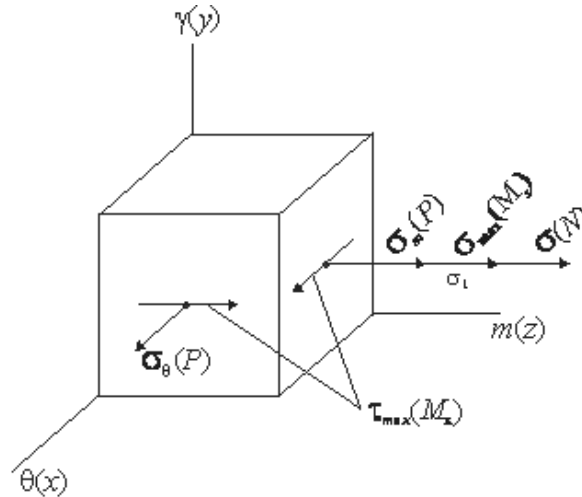


Рисунок 8.6

Вычисляем величины компонент напряженного состояния в опасной точке:

$$\sigma_x = \sigma_\theta(p) = 31,3 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\sigma_z = \sigma_m(p) + \sigma_{\max}(M_x) + \sigma(N) = 15,6 + 61,2 + 44,2 = 121 \text{ МПа},$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{\max}(M_x) = 18,4 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0.$$

4. Вычисляем главные напряжения.

Тензор напряжений для опасной точки имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31,3 & 0 & 18,4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18,4 & 0 & 121 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что площадка  $xy$  является главной площадкой, и характеристическое уравнение тензора напряжений запишется так:

$$(0 - P)[(\sigma_x - P)(\sigma_z - P) - \tau_{xz}^2] = 0,$$

или  $(0 - P) \cdot [P^2 - (\sigma_z + \sigma_x)P + (\sigma_z \sigma_x - \tau_{xz}^2)] = 0$ .

Корни этого уравнения будут:  $P_1 = 0, P_2 = 124,6 \text{ МПа}, P_3 = 27,7 \text{ МПа}$ .

Расставим индексы главных напряжений. Учитывая правило:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , получаем:  $\sigma_1 = 124,6 \text{ МПа}, \sigma_2 = 27,7 \text{ МПа}, \sigma_3 = 0$ .

5. Определяем эквивалентное напряжение.

Так как  $\sigma_{\text{ТР}} \neq \sigma_{\text{ТС}}$ , эквивалентные напряжения следует определять по тео-

рии Мора:  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3$ , где  $m = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ТС}}} = \frac{250}{300} = 0,833$ , тогда

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = 125 - 0,833 \cdot 0 = 125 \text{ МПа}$$

6. Находим коэффициент запаса по текучести.

$$n_{\text{T}} = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}}} = \frac{250}{125} = 2.$$



**ПРИЛОЖЕНИЯ**  
**Приложение 1**  
**Исходные данные задачи 1**

I	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	−40,0	0	0	51,2	6,8	88,8
2	−50,0	0	0	41,8	10,3	98,2
3	−100,0	0	0	−19,5	−49,5	79,5
4	−40,0	0	0	32,4	13,7	107,6
5	−50,0	0	0	23,0	17,1	117,0
6	80,0	0	0	−42,9	−15,3	−17,1
7	−60,0	0	0	13,6	20,5	126,4
8	−130,0	0	0	41,2	−6,8	78,8
9	60,0	0	0	15,9	−14,1	44,1
10	−110,0	0	0	31,8	−10,3	88,2
11	−60,0	0	0	22,4	−13,7	97,6
12	60,0	0	0	−50,5	−56,4	−9,5
13	−50,0	0	0	13,0	−17,1	107,0
14	−80,0	0	0	−5,8	23,9	125,8
15	120,0	0	0	−43,7	−37,6	−16,3
16	−100,0	0	0	43,2	18,8	56,8
17	−80,0	0	0	39,7	28,2	60,3
18	70,0	0	0	−75,0	−53,6	15,0
19	−60,0	0	0	36,3	37,6	63,7
20	−80,0	0	0	29,5	56,4	70,5
21	80,0	0	0	−72,4	−42,4	12,4
22	−100,0	0	0	26,1	65,8	73,9
23	−100,0	0	0	33,2	−18,8	46,8
24	−80,0	0	0	24,3	−30,6	75,7
25	−80,0	0	0	19,5	−56,4	60,5
26	−100,0	0	0	16,1	65,8	63,9
27	−60,0	0	0	30,7	−23,0	69,3
28	130,0	0	0	23,2	−18,8	36,8
29	170,0	0	0	12,9	47,0	47,1
30	−70,0	0	0	37,1	15,3	62,9

Продолжение приложения 1

II	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-60,0	0	0	52,7	10,0	87,3
2	-100,0	0	0	44,0	15,0	96,0
3	-60,0	0	0	60,0	17,3	80,0
4	-90,0	0	0	35,4	20,0	104,6
5	-50,0	0	0	26,7	25,0	113,3
6	-80,0	0	0	55,0	26,0	85,0
7	-50,0	0	0	18,0	30,0	122,0
8	-120,0	0	0	42,7	-10,0	77,3
9	-60,0	0	0	50,0	-34,6	90,0
10	-100,0	0	0	34,0	-15,0	86,0
11	-70,0	0	0	25,4	-20,0	94,6
12	-60,0	0	0	45,0	43,3	95,0
13	-60,0	0	0	16,7	-25,0	103,3
14	-80,0	0	0	36,1	65,8	83,9
15	-70,0	0	0	40,0	52,0	100,0
16	-120,0	0	0	40,0	-17,3	60,0
17	-60,0	0	0	50,0	26,0	65,0
18	-80,0	0	0	45,0	26,0	75,0
19	-70,0	0	0	30,0	34,6	70,0
20	-90,0	0	0	20,0	52,0	80,0
21	-80,0	0	0	40,0	-34,6	80,0
22	-100,0	0	0	15,0	60,6	85,0
23	-80,0	0	0	30,0	-17,3	50,0
24	-70,0	0	0	35,0	-43,3	85,0
25	-90,0	0	0	10,0	-52,0	70,0
26	-70,0	0	0	-20,6	35,0	100,6
27	-60,0	0	0	22,7	10,0	57,3
28	120,0	0	0	20,0	17,3	40,0
29	140,0	0	0	-13,3	25,0	73,3
30	-90,0	0	0	57,1	15,3	82,9

Продолжение приложения 1

Ш	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-50,0	0	0	54,7	12,9	85,3
2	-90,0	0	0	47,0	19,3	93,0
3	-70,0	0	0	50,7	23,0	89,3
4	-80,0	0	0	39,4	25,7	100,6
5	-90,0	0	0	31,7	32,2	108,3
6	-60,0	0	0	44,3	-30,6	95,7
7	-100,0	0	0	24,0	38,6	116,0
8	-110,0	0	0	44,7	-12,9	75,3
9	-70,0	0	0	37,8	38,3	102,2
10	-90,0	0	0	37,0	-19,3	83,0
11	-80,0	0	0	29,4	25,7	90,6
12	-80,0	0	0	31,4	-46,0	108,6
13	-100,0	0	0	21,7	-32,2	98,3
14	-70,0	0	0	25,0	60,6	95,0
15	-90,0	0	0	47,1	-15,3	72,9
16	-60,0	0	0	32,7	10,0	67,3
17	-100,0	0	0	24,0	15,0	76,0
18	-70,0	0	0	40,7	-23,0	79,3
19	-100,0	0	0	15,4	20,0	84,6
20	80,0	0	0	-82,0	30,0	22,0
21	-100,0	0	0	34,3	-30,6	85,7
22	120,0	0	0	-90,6	35,0	30,6
23	110,0	0	0	-83,7	25,6	13,7
24	-80,0	0	0	27,8	-38,3	92,2
25	-140,0	0	0	-12,0	-30,0	92,0
26	140,0	0	0	-47,3	-10,0	-12,7
27	-80,0	0	0	15,0	53,6	105,0
28	140,0	0	0	-30,6	-35,0	90,6
29	150,0	0	0	-22,0	30,0	82,0
30	-60,0	0	0	35,9	14,1	64,1

Продолжение приложения 1

IV	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-80,0	0	0	55,9	14,1	84,1
2	-80,0	0	0	48,8	21,2	91,2
3	-100,0	0	0	28,8	21,2	71,2
4	-70,0	0	0	41,7	28,3	98,3
5	-80,0	0	0	34,6	35,4	105,4
6	-80,0	0	0	21,7	28,3	78,3
7	-90,0	0	0	27,6	42,4	112,4
8	-100,0	0	0	45,9	-14,1	74,1
9	100,0	0	0	-76,0	38,6	16,0
10	-60,0	0	0	38,8	-21,2	81,2
11	-90,0	0	0	31,7	-28,3	88,3
12	180,0	0	0	30,0	100,0	-120,0
13	-90,0	0	0	24,6	-35,4	95,4
14	-60,0	0	0	10,5	49,5	109,5
15	160,0	0	0	-79,5	-49,5	19,5
16	-60,0	0	0	34,7	12,9	65,3
17	-90,0	0	0	27,0	19,3	73,0
18	110,0	0	0	-50,0	34,6	-10,0
19	-100,0	0	0	19,4	25,7	80,6
20	-80,0	0	0	11,4	46,0	88,6
21	170,0	0	0	-60,0	52,0	0,0
22	170,0	0	0	-83,6	45,0	23,6
23	100,0	0	0	-47,1	47,0	-12,9
24	130,0	0	0	17,1	15,3	42,9
25	120,0	0	0	-68,6	46,0	8,6
26	-60,0	0	0	-13,6	45,0	93,6
27	160,0	0	0	-44,1	14,1	-15,9
28	150,0	0	0	-45,3	12,9	-14,7
29	90,0	0	0	-68,3	32,2	8,3
30	110,0	0	0	-23,6	45,0	83,6

Продолжение приложения 1

V	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	–90,0	0	0	57,1	15,3	82,9
2	–70,0	0	0	50,7	23,0	89,3
3	–80,0	0	0	51,2	6,8	88,8
4	–60,0	0	0	44,3	30,6	95,7
5	–70,0	0	0	37,8	38,3	102,2
6	–60,0	0	0	41,8	10,3	98,2
7	–80,0	0	0	31,4	46,0	108,6
8	–90,0	0	0	47,1	–15,3	72,9
9	–40,0	0	0	32,4	13,7	107,6
10	–70,0	0	0	40,7	23,0	79,3
11	–100,0	0	0	34,3	–30,6	85,7
12	–50,0	0	0	23,0	–17,1	117,0
13	–80,0	0	0	27,8	–38,3	92,2
14	–100,0	0	0	15,0	53,6	105,0
15	–60,0	0	0	13,6	20,5	126,4
16	–130,0	0	0	35,9	14,1	64,1
17	–180,0	0	0	28,8	21,2	71,2
18	–130,0	0	0	41,2	–6,8	78,8
19	–90,0	0	0	21,7	28,3	78,3
20	100,0	0	0	–76,0	38,6	16,0
21	–110,0	0	0	31,8	10,3	88,2
22	180,0	0	0	–79,5	49,5	19,5
23	110,0	0	0	–50,0	34,6	–10,0
24	100,0	0	0	–117,8	–79,9	147,8
25	170,0	0	0	–60,0	52,0	0,0
26	130,0	0	0	17,1	15,3	42,9
27	–50,0	0	0	13,0	–17,1	107,0
28	160,0	0	0	–44,1	–14,1	–15,9
29	110,0	0	0	–23,6	45,0	83,6
30	–80,0	0	0	–5,8	23,9	125,8

## Окончание приложения 1

VI	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-100,0	0	0	60,0	17,3	80,0
2	-60,0	0	0	55,0	26,0	85,0
3	-80,0	0	0	43,2	18,8	56,8
4	-50,0	0	0	50,0	34,6	90,0
5	-60,0	0	0	45,0	43,3	95,0
6	-90,0	0	0	39,7	28,2	60,3
7	-70,0	0	0	40,0	52,0	100,0
8	-80,0	0	0	50,0	-17,3	70,0
9	-70,0	0	0	36,3	-37,6	63,7
10	-80,0	0	0	45,0	26,0	75,0
11	-80,0	0	0	40,0	-34,6	80,0
12	-80,0	0	0	29,5	56,4	70,5
13	-70,0	0	0	35,0	-43,3	85,0
14	-90,0	0	0	22,7	10,0	57,3
15	-100,0	0	0	26,1	65,8	73,9
16	-70,0	0	0	37,1	15,3	62,9
17	-80,0	0	0	30,7	23,0	69,3
18	-60,0	0	0	33,2	18,8	46,8
19	-80,0	0	0	24,3	30,6	75,7
20	80,0	0	0	-72,4	42,4	12,4
21	-80,0	0	0	19,5	56,4	60,5
22	70,0	0	0	-75,0	53,6	15,0
23	120,0	0	0	-43,7	37,6	-16,3
24	-80,0	0	0	16,1	-65,8	63,9
25	60,0	0	0	-50,5	56,4	-9,5
26	100,0	0	0	15,9	14,1	44,1
27	100,0	0	0	23,2	18,8	36,8
28	170,0	0	0	-42,9	15,3	-17,1
29	130,0	0	0	-19,5	49,5	79,5
30	150,0	0	0	12,9	-47,0	47,1

**Приложение 2**  
**Исходные данные задачи 2**

№	$D$ , мм	$h$ , мм	$F$ , кН	$M_{\text{И}}$ , Нм	$M_{\text{К}}$ , Нм	$P$ , МПа	$\sigma_{\text{ТД}}$ , МПа	$\sigma_{\text{ТН}}$ , МПа
1	18	0,6	1,7	9	12	2,7	350	400
2	19	0,6	-1,8	10	14	2,8	300	350
3	20	0,6	1,9	11	15	2,9	310	330
4	21	0,7	2,3	14	19	3,0	370	420
5	22	0,7	-2,4	16	21	3,1	320	370
6	23	0,7	2,5	17	23	3,2	350	400
7	24	0,8	3,0	21	29	3,3	400	450
8	25	0,8	-3,2	23	31	3,4	350	400
9	26	0,8	3,3	25	34	3,5	310	360
10	27	0,9	-3,8	30	40	3,6	400	450
11	28	0,9	-3,9	33	45	3,7	320	350
12	29	0,9	-4,1	36	47	3,8	350	380
13	30	1,0	4,7	42	55	3,9	420	470
14	31	1,0	4,9	45	60	4,0	430	480
15	32	1,0	5,0	48	65	4,1	440	490
16	33	1,1	-5,7	55	74	4,2	450	500
17	34	1,1	-5,9	59	79	4,3	470	520
18	35	1,1	-6,1	63	84	4,4	480	530
19	36	1,2	6,8	72	95	4,5	300	330
20	37	1,2	7,0	76	100	4,6	320	360
21	38	1,3	7,8	87	115	4,7	330	370
22	39	1,3	8,0	92	123	4,8	400	440
23	40	1,3	8,2	96	128	4,9	420	460
24	41	1,4	9,0	110	145	5,0	440	480
25	42	1,4	9,3	115	152	5,1	500	550
26	43	1,4	-9,5	120	160	5,2	410	460
27	44	1,5	10,4	135	175	5,3	380	430
28	45	1,5	-10,7	140	185	5,4	310	340
29	46	1,5	10,9	145	195	5,5	420	470
30	47	1,6	11,8	165	210	5,6	300	330

**Приложение 3**  
**Механические характеристики сталей**

№	Марка стали	Модуль упругости, $E \cdot 10^{-5}$ , МПа	Предел текучести, $\sigma_T$ , МПа	Коэффициент линейного расширения, $\alpha \cdot 10^6, 1/^\circ\text{C}$
1.	Ст 10	2,10	210	11,6
2.	Ст 20	2,13	250	11,1
3.	Ст 25	1,98	280	11,1
4.	Ст 30	2,00	300	12,6
5.	Ст 35	2,06	320	11,9
6.	Ст 40	2,13	340	12,4
7.	Ст 45	2,00	360	11,7
8.	Ст 50	2,16	380	12,0
9.	Ст 55	2,10	390	11,0
10.	Ст 60	2,04	420	11,1
11.	Ст 20Г	2,04	280	12,3
12.	Ст 30Г	2,04	320	12,6
13.	Ст 50Г	2,16	400	11,6
14.	Ст 20Х	2,16	650	11,3
15.	Ст 40Х	2,14	800	13,4
16.	Ст 45Х	2,06	850	12,8
17.	Ст 30ХМ	2,03	750	12,3
18.	Ст 35ХМ	2,04	850	12,3
19.	Ст 40ХН	2,00	800	11,8
20.	Ст 50ХН	2,00	900	11,8
21.	Ст 15ХФ	2,06	550	12,0
22.	Ст 40ХФА	2,00	750	11,0
23.	Ст 20ХГСА	1,96	650	11,0
24.	Ст 30ХГС	1,94	850	11,0



### Список литературы

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М. : Высшая школа, 1982. – 264 с.
3. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.
4. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
5. Устиненко В.Л. Основы проектирования деталей машин / В.Л. Устиненко, Н.Ф. Киркач, Р.А. Баласанян. – Харьков : Вища школа, изд-во при Харьк. ун-те, 1983. – 184 с.

## Содержание

Вступление.....	3
1. Напряжённое состояние в точке.....	4
1.1. Понятие о напряжённом состоянии в точке и тензоре напряжений...	4
1.2. Пример формирования матрицы тензора напряжений.....	6
2. Определение напряжений на произвольно ориентированной наклонной площадке.....	7
3. Понятия о главных площадках и главных напряжениях. Классификация типов напряжённого состояния в точке. Октаэдрические напряжения, интенсивность напряжений.....	8
4. Обобщённый закон Гука.....	11
4.1. Формулировка закона Гука.....	11
4.2. Пример определения компонент напряженного и деформированного состояния с применением обобщенного закона Гука.....	13
5. Удельная потенциальная энергия деформации.....	14
6. Гипотезы предельных напряжённых состояний (гипотезы прочности)..	15
6.1. Первая гипотеза прочности (гипотеза наибольших нормальных напряжений).....	17
6.2. Вторая гипотеза прочности (гипотеза наибольших линейных деформаций).....	17
6.3. Третья гипотеза прочности (гипотеза наибольших касательных напряжений).....	17
6.4. Четвёртая гипотеза прочности (энергетическая гипотеза формоизменения).....	18
6.5. Гипотеза прочности Мора.....	19
7. Основы расчета оболочек по безмоментной теории.....	20
8. Расчетно-проектировочное задание.....	23
8.1. Содержание расчетно-проектировочного задания.....	24
8.2. Порядок выполнения задания.....	24
8.3. Примеры решения задач.....	25
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	33
Приложение 1. Исходные данные задачи 1.....	33
Приложение 2. Исходные данные задачи 2.....	39
Приложение 3. Механические характеристики сталей.....	40
Список литературы.....	41

Навчальне видання

ПОГОРІЛОВ Сергій Юрійович

ХАВІН Валерій Львович

ШЕРГІН Сергій Юрійович

КРАВЦОВА Наталія Вікторівна

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО  
СТАНУ В ТОЧЦІ

Навчально-методичний посібник з курсу «Опір матеріалів»  
для студентів машинобудівних спеціальностей

Російською мовою

Відповідальний за випуск проф. В.Л. Хавін  
Роботу до видання рекомендував С.К. Шелковий

В авторській редакції

План 2016 р., поз. 60

Підп.до друку 2016 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.  
Наклад 100 прим. Зам. № Ціна договірна

---

Видавничий центр НТУ «ХП».  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вул. Багалія, 21

---

Друкарня НТУ «ХП». 61002, Харків, вул. Багалія , 21

